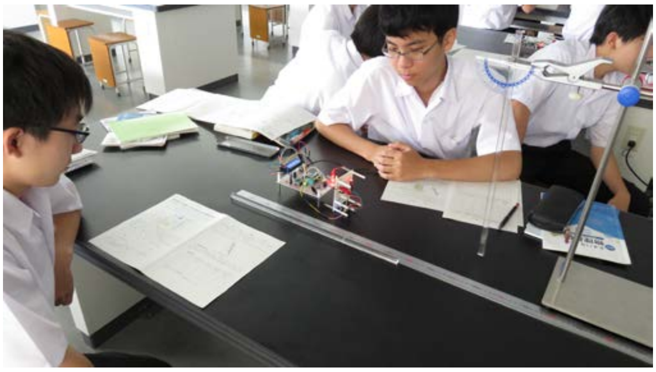
剛体棒振り子の周期から重力加速度を求める課題探究実験の開発

実施担当者　金沢市立工業高等学校
臨時的任用講師　末栄　良弘

≪コメント≫
日々の授業では生徒の知的好奇心を刺激し、問題解決の科学的思考力を伸ばすことを心掛けている。



課題探究実験に取り組む生徒の活動風景

1　はじめに

従来、ボルダの単振子による重力加速度を求める実験はあるが、実験装置は高価で金属おもりの直径や振り子の長さをノギスと直尺で測り、単振子の振幅を 5° 以内とし、その周期は往復運動を目で何回も数えて、ストップウォッチで時間を測るものである。
この方法では下記に示す欠点がある。

・生徒はストップウォッチの操作に慣れるのに多少時間がかかる。
・振り子の往復振動を 200 回まで数えなくてはならず、往復運動の回数を数えるとき、生徒は間違え易い。
・振り子が往復振動するとき、中心を通過する瞬間の時点を判断するのが難しく、ストップウォッチを押すタイミングが早くなったり遅くなったりして、個人誤差が生じる。
・振り子の周期を求めるのに多くの時間がかかり、データをまとめて最終的に重力加速度を計算する時間が足りなく、また、実験結果を考察する時間も足りない。

そこで、私は安価で加工しやすいアクリル製の均一な棒振り子を用いて、その往復振動の回数を数えなくても自動的にその振り子の周期を測定することができるように、マイクロ波ドップラーセンサーを利用した剛体棒振り子による重力加速度測定措置を開発することにした。

2　目　的

(1) マイクロ波ドップラーセンサーと PIC マイコン (PIC16F873A) および ZigBee(無線モジュール)を利用した剛体振子による重力加速度測定装置のハードとソフトを開発し、重力加速度の値を課題探究実験で求める。
(2) 課題探究実験を通して、理数工の知識を駆使して科学的探究心を養う。
(3) 実験結果と向き合い、徹底的に考え抜く科学的思考力を養う。

3　センサー電子回路の製作

生徒の協力で、マイクロ波ドップラーセンサーの電子回路製作を完成させた。このセンサーに物体が近づくと赤色 LED が点灯し、遠ざかると緑色 LED が点灯する。この時の電圧データの変化を PIC マイコンに入力して液晶表示器に時間と電圧の値を表示させると同時に無 ZigBee によってパソコンへ送信する電子回路である。

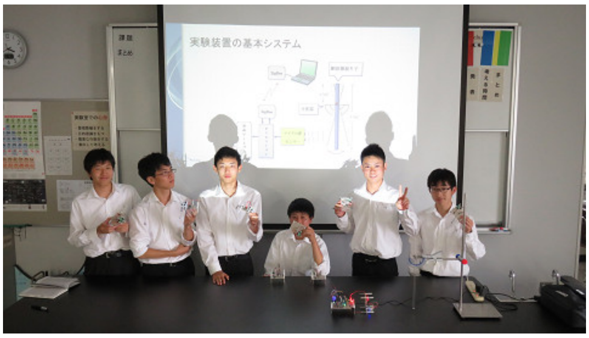


図１　電子回路製作に協力した生徒達

図１は、生徒各自が完成した電子回路装置を手にしている様子を表している。マイクロ波ドップラーセンサーの電子回路装置を９班分製作した。また、図２に示すように、アクリル剛体棒振り子を振らせてマイクロ波ドップラーセンサ一電子回路の動作確認をした。

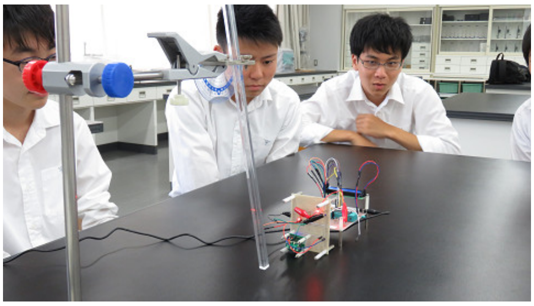


図２　センサー電子回路の動作確認中

４　実験装置の基本システム

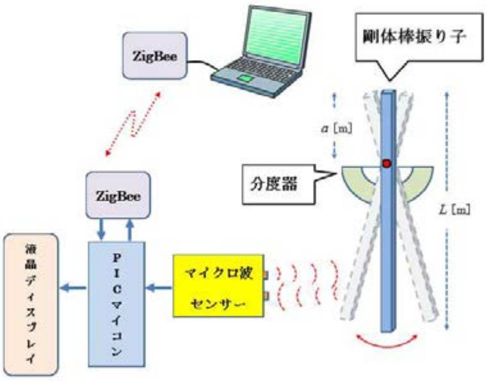


図３　実験装置の基本システム

図３に示すように、全長 L[m]の剛体棒の上端から a[m]の位置を回転中心軸とする剛体棒振り子を振動させて、24GHz のマイクロ波を当て、剛体棒振り子の往復運動をマイクロ波の反射量の電圧変化で捉え、PIC マイコンで測定したデータをパソコンへ ZigBee を使って無線送信してパソコンでその時間的変化から剛体棒振り子の周期 T[s]を求める実験装置の基本システムである。

４－１　周期を求める基礎的計算

図４に示すように、質量 M[kg]で全長 L[m]の均一な剛体棒の上端から長さ a[m]に位置する回転軸 O 点の左まわりに角度 θ で振らせると往復運動する剛体棒振り子のモデルを考えて、この剛体棒振り子の周期 Tを求める。

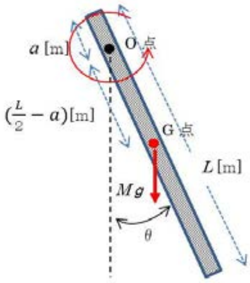


図４　剛体棒振り子のモデル

剛体棒の単位長さ当たりの質量を ρ [kg/m]＝M/L、回転軸 O 点のまわりでの左周りの慣性モーメントを I[kg・m²]、回転角を θ [rad/]、加速度を$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ [rad/s²]とすると、重力による右回りの力のモーメントが働くので剛体棒の回転の運動方程式は、

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mg\left(\frac{L}{2}-a\right)\sin\theta \cdots\cdots\cdots \text{式①}$$

となる。

$I=\frac{1}{3}M(L^2-3La+3a^2)$を代入して整理すると、

$$\therefore\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega_0{}^2\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots \text{式②}$$

ここで、$\omega_0=\sqrt{\frac{3g(L-2a)}{2(L^2-3La+3a^2)}}$　である。

初期条件$(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$として、角度 $\theta=\theta_0$、$k=\sin\frac{\theta_0}{2}$、$\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\varphi$と置き、式②の微分方程式を数学的に解いて周期 Tを求めると、

$$\text{周期 } T=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\omega_0\sqrt{(1-(k\sin\varphi)^2)}}=\frac{4}{\omega_0}K(k)$$

$$\therefore T=4K(k)\sqrt{\frac{2(L^2-3La+3a^2)}{3g(L-2a)}} \quad \text{となる。}$$

ここで、$K(k)$は第１種完全楕円積分である。

$K(k)$の値は、$K(k)=K(\sin\frac{\theta_0}{2})$であるから、初期条件の角度$\theta_0$で決まる定数値となる。

一方、周期 $T=4K(k)\sqrt{\frac{2(L^2-3La+3a^2)}{3g(L-2a)}}$ より、剛体棒振り子の全長 Lと剛体棒の上端から回転軸までの長さを測定し、剛体棒振り子の周期 Tを測定できれば、重力加速度gを求めることができる。つまり

$$\therefore\text{重力加速度 } g=\left(\frac{4K(k)}{T}\right)^2\cdot\frac{2(L^2-3La+3a^2)}{3(L-2a)}$$

となる。

４－２　重力加速度測定実験装置

図５に示すように、米国 CCS 社の C 言語コンパイラーと Microsoft 社 Visual Studio Express 2013 for Desktop の C#言語[1)]を使って、PIC マイコンに接続した 24GHz のマイクロ波ドップラーセンサーで計測した測定データをパソコンへ無線送信してパソコンでその時間的変化から剛体棒振り子の周期 T及び重力加速度

gを求める装置である。

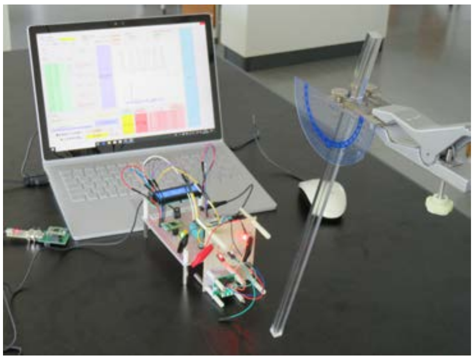


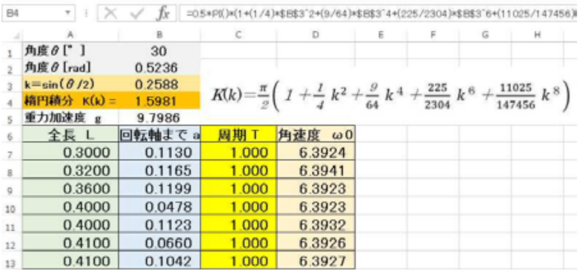
図５　重力加速度測定実験装置

５　課題探究学習と結果

５－１　課題探究学習１

Microsoft社の表計算ソフトExcelを使って、初期条件の角度θ_0＝30°で、周期 Tが 1.000 秒となる剛体棒振り子の全長 L と剛体棒の上端から回転軸までの長さ a の値を具体的に求めよ。

初期条件の角度 θ＝30°、金沢市の重力加速度の値をg＝9.7986[m/s^2]とする。



B4　=0.5*PI()*(1+(1/4)*B3^2+(9/64)*B3^4+(225/2304)*B3^6+(11025/147456)

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{225}{2304}k^6+\frac{11025}{147456}k^8\right)$$

	A	B	C	D
1	角度θ[°]	30		
2	角度θ[rad]	0.5236		
3	k=sin(θ/2)	0.2588		
4	楕円積分　K(k)＝	1.5981		
5	重力加速度　g	9.7986		
6	全長　L	回転軸まで a	周期 T	角速度　ω0
7	0.3000	0.1130	1.000	6.3924
8	0.3200	0.1165	1.000	6.3941
9	0.3600	0.1199	1.000	6.3923
10	0.4000	0.0478	1.000	6.3923
11	0.4000	0.1123	1.000	6.3932
12	0.4100	0.0660	1.000	6.3926
13	0.4100	0.1042	1.000	6.3927

図６　Excel による周期計算の例

図６に示すように Excel のシートの A7 セル列以降に剛体棒振り子の全長 L を入れ、B7 セル列以降に回転軸まで長さaを入れると、C7 セル列以降に周期 Tを自動的に計算できた。

５－２　課題探究学習２

初期条件の角度 θ＝θ_0 として、周期 T を変数 aの関数と考えて、剛体棒振り子の周期 Tが最小値となる変数 a を L で表せ。さらに、その周期の最小値を L で表せ。

剛体棒振り子の周期 Tは、

$$T=4\,\mathrm{K}\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{\frac{2\,(L^2-3La+3a^2)}{3g\,(L-2a)}}\quad\cdots\cdots式③$$

ここで、楕円積分 $\mathrm{K}\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$は初期条件の角度$\theta_0$で決まる定数値である。

剛体棒振り子の全長 L と重力加速度 g が一定値のとき、周期Tは変数 aの関数となるので、周期$T(a)$を変数 aで微分して０と置いて解く。

$$\frac{dT(a)}{da}=0$$

分数関数の微分法を用いて計算すると、

$6a^2-6La+L^2=0$　で表す式となる。

この式を変数 aに関する２次方程式として解くと、$\therefore a=\frac{3-\sqrt{3}}{6}L$　となり、そのとき剛体棒振りの周期 Tが最小値となる。その最小値$T(L)$は、

$$\therefore T(L)=4\,\mathrm{K}\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}g}}$$　となった。

５－３　課題探究学習３

剛体棒振り子の全長の長さ L が一定のとして、Microsoft 社の表計算ソフト Excel の VBA を使って、剛体棒振り子の上端から回転軸までの長さ a と周期のグラフを作成せよ。

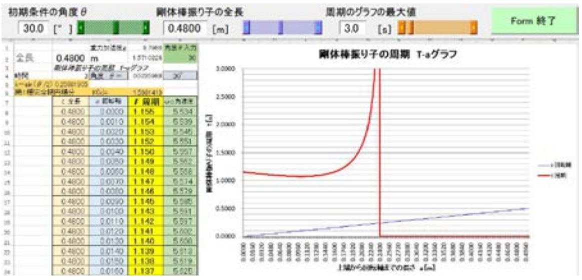


図７　Excel による T-a グラフ

図７は全長 L=0.4800ｍの剛体棒振り子の場合で、その振り子の上端から回転軸までの長さ a と周期 Tのグラフを表している。a の値が $L/2$ 以下で下に凸のグラフになっていることが分かった。

５－４　課題探究実験４

Microsoft 社の表計算ソフト Excel の VBA を使って、その棒振り子の全長 L と周期 T の最小値との T−L グラフを作成せよ。

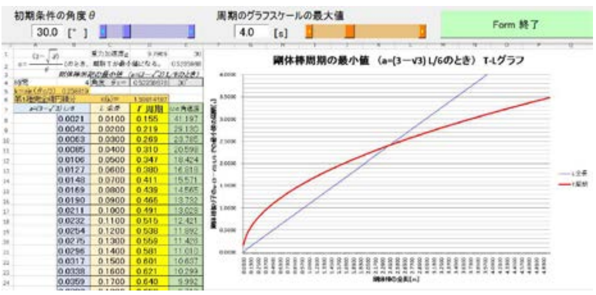


図８　剛体棒振り子の最小周期 T-L グラフ

図８に示すように、全長 L=1.0000ｍの場合、

回転軸までの長さ$a=\frac{3-\sqrt{3}}{6}L=0.2113$m のときに周期が最小となり、その周期は$T=1.552$ s となる。剛体棒振り子の周期の最小値は、図８のグラフから全長 L のルート関数$\sqrt{L}$になっていることが分かった。

５－５　課題探究実験５

実際に、マイクロ波ドップラーセンサーとPIC マイコンおよび ZigBee を利用した剛体棒振り子による重力加速度測定実験装置を使って重力加速度gの値を求めよ。

パソコンのディスプレイに測定値（時間と電圧）を刻々と表示させ、順次グラフ化し、それらの 128 個のデータを離散フーリエ変換して最大スペクトルの周波数を求める。その周波数に対する周期 T と剛体棒の全長 L と上端から回転軸までの長さ a と初期条件の角度 θ から重力加速度 g の値を求めることができた。

図９　重力加速度測定実験結果の例１

図９に示すように、離散フーリエ変化により全長 L=0.4100mの場合、回転軸までの長さ a=0.0660mの場合、周期は T=1.0000 s となり、重力加速度の値 g=9.799［m/s^2］となった。

６　まとめと考察

表１　重力加速度測定実験結果

NO.	剛体棒振り子の全長 L	回転軸までの長さ a	初期条件の角度 θ	剛体棒振り子の周期 Tの値	重力加速度 g
1	0.1000	0.0120	30	0.500	9.796
2	0.1000	0.0281	30	0.500	9.800
3	0.4000	0.0479	30	1.000	9.798
4	0.4000	0.1123	30	1.000	9.797
5	0.4100	0.0660	30	1.000	9.799
6	0.4100	0.1042	30	1.000	9.798
7	0.4500	0.0154	30	1.100	9.798
8	0.4500	0.1445	30	1.100	9.798
9	0.4800	0.0520	30	1.100	9.798
10	0.4800	0.1379	30	1.100	9.799
				平均	9.798 [m/s2]

表１は全長 L=0.1000m、0.4000m、0.4100m、0.4500m、04800mのアクリル製棒でそれぞれ上端から回転軸までの長さ a が異なる値の剛体棒振り子を用いて、重力加速度測定実験をした結果である。表１に示すように、重力加速度の測定値の平均値は g=9.798［m/s^2］となった。

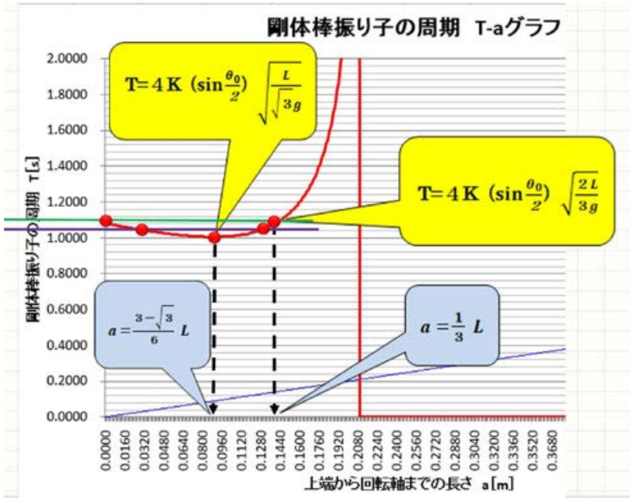


図１０　振り子の周期 T（T-a グラフ）の解析

図１０に示すように、$0\leqq a\leqq L/3$ の領域でグラフが下に凸になっているので、

$0\leqq a<(3-\sqrt{3})L/6$、$(3-\sqrt{3})L/6<a\leqq L/3$ の範囲で、剛体振り子の周期 Tは、a の異なる値の２か所で同じ周期の値になることを発見できた。

例えば、初期条件の角度$\theta_0=30°$、全長L=0.4500mの剛体振り子の場合、剛体棒の上端から回転軸までの長さが a=0.0154mと a=0.1445mの２か所の位置で振り子の周期が1.100 秒となる。これは単振り子の場合には決してあり得ないことであり、剛体棒振り子の周期の特性であると考えられる。

この課題探究実験を通して、所期の目的を達成することができた。そして、剛体棒振り子の周期の特性を発見できた。

謝辞　ここに、本研究を助成して頂いた公益財団法人中谷医工計測技術振興財団に心より御礼申し上げます。また、協力してくれた生徒達に深く感謝いたします。

参考文献

1) Visual C# 2013 逆引き大全 555 の極意
増田智明／池谷京子／国本温子／著
秀和システム出版